

Teoria do Risco

Aula 0

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://www.porthalley.org/materiais.html#notas>

➤ Notas de aula da disciplina Teoria do Risco oferecida no curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade Federal de Alfenas, Campus Varginha.

PIRES, M.D. **Introdução**. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Instituto de Ciências Sociais Aplicadas, Varginha, 2026. Disponível em: <https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>. Acesso em: 29 jan. 2026.

Introdução

Desde as antigas civilizações, o ser humano sempre se preocupou com as incertezas do futuro...

O homem teve a necessidade de criar formas de proteção contra os perigos para a sua família e para o seu patrimônio.

Introdução

Os comerciantes mesopotâmicos e fenícios:



Os hebreus:



Introdução

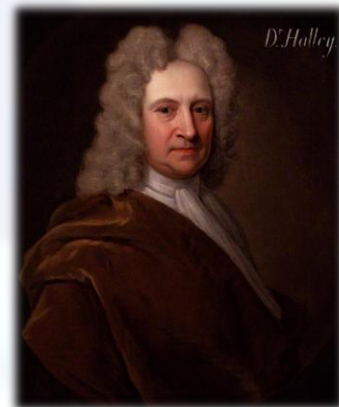
- Por volta de 1347, na cidade de Gênova as atividades de seguros começam a se popularizar...
 - “*A polizza*” “*A promessa*”
 - Seguro de transporte marítimo.
 - Primeiros estudos da matemática atuarial.
- No século XVI, diversas operações de seguros na europeu enfrentaram crises
 - Técnicas de gestão de risco intuitivas.
 - Técnicas pouco elaboradas.

Introdução

- Século XVII, a correspondência entre Pascal e Fermat contribuiu decisivamente para a sistematização da teoria das probabilidades.



- Edmond Halley criou uma das primeira tábuas de mortalidade sobre princípios científicos concretos (1693)



Introdução

- Século XX surge a teoria do risco coletivo.
 - Modelo de Crámer –Lundberg.
 - Ramo vida e ramo não vida...
- A matemática atuarial é um ramo da Matemática intimamente ligada ao segmento de seguros...
 - Avaliar riscos
 - Avaliar sistemas de investimentos.
 - Estabelecer políticas de investimentos.
- Estabelecer valor de prêmios
 - Seguro ligados à vida (Cálculo atuarial- Sinistros só ocorrem uma vez)
 - Seguro ligado à danos (Teoria do risco - Sinistros podem ocorrer várias vezes)

Introdução

*“Pelo fato de o atuário lidar com conceitos técnicos diversos, como conceitos estatísticos, econômicos e financeiros, passou-se a usar o termo geral **Ciências atuariais** para o ramo do conhecimento relacionado a análise de risco e expectativas financeiras.”*

BRITO, Irene; GONÇALVES, Patrícia; RAMOS, Pedro Lima. O risco e a ruína na atividade seguradora. **Boletim da SPM**, v. 75, p. 1-29, 2017.

Teoria do risco

- ...reside em estabelecer um modelo de tarifação eficiente frente aos sinistros que chegam ao segurador.
- ...tem como objetivo principal estabelecer para o “bem” sob análise um prêmio justo para um dado futuro mensurável,...

Modelos de Risco

I) Qual é a melhor estimativa do valor total das indenizações a serem pagas?

II) Qual o prêmio que a seguradora deve cobrar para cobrir os sinistros com uma dada margem de segurança?

Dois padrões a serem seguidos!!

Conceitos Estatísticos

A teoria do risco é inerente à teoria estatística, portanto, a compreensão de determinados termos e conceitos estatísticos assim como algumas propriedades, se faz necessária ou até mesmo fundamental.

Conceitos Estatísticos

- Conceitos Estatísticos
 - Variável Aleatória e função de distribuição
 - Variável aleatória Discreta
 - Importantes modelos discretos
 - Variável aleatória Contínua
 - Importantes modelos de contínuos
 - Variável aleatória multidimensional
 - Esperança e Variância de variáveis aleatórias.
 - Esperança sujeito a valor limite.
 - Covariância e Correlação entre variáveis aleatórias.
 - Desigualdade de Jensen
 - Momentos ordinários e função Geradora de Momentos

➤ **MODELOS DE RISCO**

- Modelo de risco individual anual

- ...

- Modelo de risco coletivo anual

- ...

➤ **CÁLCULO DE PRÊMIOS**

- Seguro e utilidade

- Princípios de cálculos de prêmios

- Propriedades desejáveis ao prêmio

- Medida de Risco

- **Processo Estocástico para frequência de sinistros e sinistralidade**

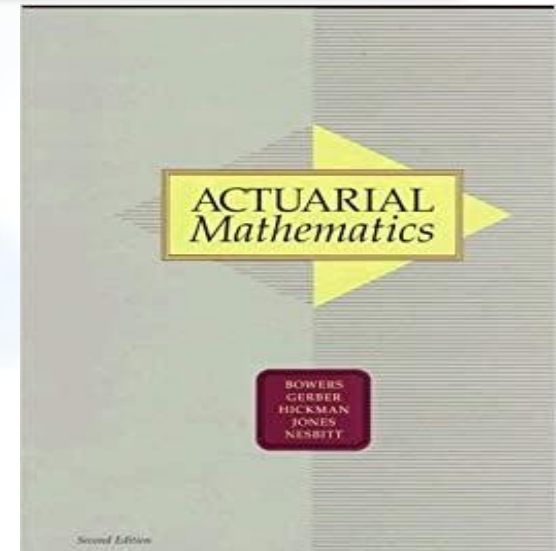
- ...

- **Processo de ruína**

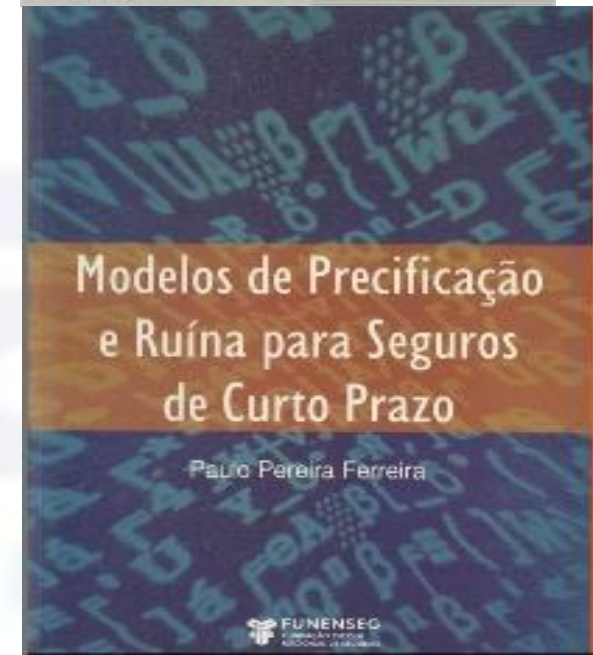
- ...

Bibliografia

BOWERS, N. et al. **Actuarial mathematics**. 2. ed. Illinois: The Society Of Actuaries, 1997.



FERREIRA, Paulo Pereira. **Modelos de precificação e ruína para seguros de curto prazo**. Funenseg, 2005.



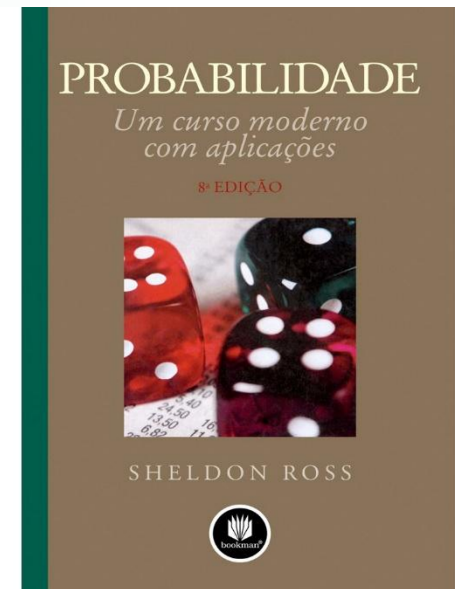
RODRIGUES, José Ângelo. **Gestão de risco atuarial**. 2008.



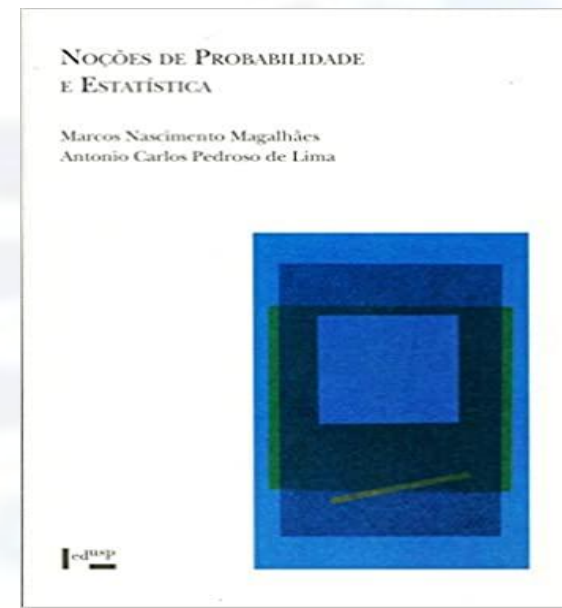
PACHECO, Ricardo. **Matemática atuarial de seguros de danos**. 2014.



JAMES, B. R.; Probabilidade: **Um Curso em nível intermediário**, IMPA, Rio de Janeiro, 3 ed., 2004.



Magalhães, M. N. Lima, A. C. P. **Noções de Probabilidade e Estatística**, Editora USP: São Paulo, 2001



PIRES, M. D. et al. Teoria do risco atuarial:
Fundamentos e conceitos. **Curitiba: CRV,**
2020.

DANILO MACHADO PIRES
LEANDRO FERREIRA
LEONARDO HENRIQUE COSTA
REINALDO ANTONIO GOMES MARQUES

TEORIA DO RISCO ATUARIAL
FUNDAMENTOS E CONCEITOS



Teoria do Risco

Aula 1

Danilo Machado Pires
danilo.pires@unifal-mg.edu.br

<https://www.porthalley.org/materiais.html#notas>

➤ Notas de aula da disciplina Teoria do Risco oferecida no curso de Bacharelado em Ciências Atuariais da Universidade Federal de Alfenas, Campus Varginha.

PIRES, M.D. **Variáveis Aleatórias**. [Notas de aula]. Universidade Federal de Alfenas, Instituto de Ciências Sociais Aplicadas, Varginha, 2026. Disponível em: <https://www.portahalley.org/materiais.html#notas>. Acesso em: 29 jan. 2026.

Variável Aleatória

A variável aleatória pode ser entendida como uma função X que associa a cada evento pertencente a uma partição do espaço amostral Ω um número real.

$$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

Uma função que mapeia os resultados de um experimento aleatório em valores numéricos.

EXEMPLO 1: Suponha o lançamento de 3 moedas, com probabilidade de sair coroa igual a q (sucesso) e $1 - q$ de sair cara (fracasso). A variável aleatória “Número de coroas” pode ser caracterizada por:

Resp.

$$R = \{0, 1, 2, 3\}, \quad R \subset \mathbb{R}$$

R é a imagem de $X(\cdot)$

Moeda 1	Moeda 2	Moeda 3	Nº de coroas	Probabilidades	
Cara	Cara	Cara	0	$q^0(1 - q)^3$	$q^0(1 - q)^3$
Coroa	Cara	Cara	1	$q^1(1 - q)^2$	$3q^1(1 - q)^2$
Cara	Coroa	Cara		$q^1(1 - q)^2$	
Cara	Cara	Coroa		$q^1(1 - q)^2$	
Coroa	Coroa	Cara	2	$q^2(1 - q)^1$	$3q^2(1 - q)^1$
Coroa	Cara	Coroa		$q^2(1 - q)^1$	
Cara	Coroa	Coroa		$q^2(1 - q)^1$	
Coroa	Coroa	Coroa	3	$q^3(1 - q)^0$	q^3

X (nº de coroas)	$P(X)$
0	$(1 - q)^3$
1	$3q^1(1 - q)^2$
2	$3q^2(1 - q)^1$
3	q^3

Variáveis aleatórias Discretas

Assume somente um número enumerável* de valores.

$$P(X = x)$$

Função de probabilidade (*fp*)

$$0 \leq P(X = x_i) \leq 1$$

para todo i .

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(X = x_i) = 1$$

* Caso seja finito ou caso exista uma bijeção entre ele e o conjunto dos números naturais.

Variáveis aleatórias Contínuas

Corresponderem aos dados de medida, assumindo valores em um intervalo de números reais

$f(x)$ Função de densidade (f.d.p)

$f(x) \geq 0$ para qualquer valor de x

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$$

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

Função de distribuição acumulada

Função de distribuição de probabilidade, simplesmente função de distribuição.

$$F_X(x_k) = P(X \leq x_k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x_k} f_X(z) dz \\ \sum_{i=0}^k P(X = x_i) \end{cases}$$

Função de distribuição acumulada

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0;$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1;$
- Se $x_1 \leq x_2$, então $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$, $F_X(x)$ é uma função crescente de x ;
- $P_X(x_1 \leq X \leq x_2) = F_X(x_2) - F_X(x_1);$

Função de distribuição acumulada

- O conhecimento da função permite obter diversas informações sobre a variável.
- A composição das funções de probabilidade faz parte da modelagem teórica das realizações das variáveis aleatórias...

Função Sobrevivência/ Excesso de Danos

$$\bar{F}_X(x) = P(X > x) = 1 - F_X(x) = S_X(x)$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \bar{F}_X(x) = 1;$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}_X(x) = 0;$
- Se $x_1 > x_2$, então $\bar{F}_X(x_1) > \bar{F}_X(x_2)$, é uma função não crescente de x ;

EXEMPLO 2: Uma apólice de seguro cobre uma perda aleatória X , com um valor de franquia d , onde $0 < d < 1$. A perda é modelada como uma variável aleatória contínua com densidade $f_X(x) = 2x$ para $0 < x < 1$. Sabe-se que a probabilidade da seguradora pagar uma indenização menor que 0,5 é 64%. Calcule o valor da franquia.

Solução

EXEMPLO 2: Uma apólice de seguro cobre uma perda aleatória X , com um valor de franquia d , onde $0 < d < 1$. A perda é modelada como uma variável aleatória contínua com densidade $f_X(x) = 2x$ para $0 < x < 1$. Sabe-se que a probabilidade da seguradora pagar uma indenização menor que 0,5 é 64%. Calcule o valor da franquia.

Solução

$$Y = X - d$$

$$P(Y \leq 0,5) = P(X \leq 0,5 + d) = 0,64 = \int_0^{0,5+d} 2x dx$$

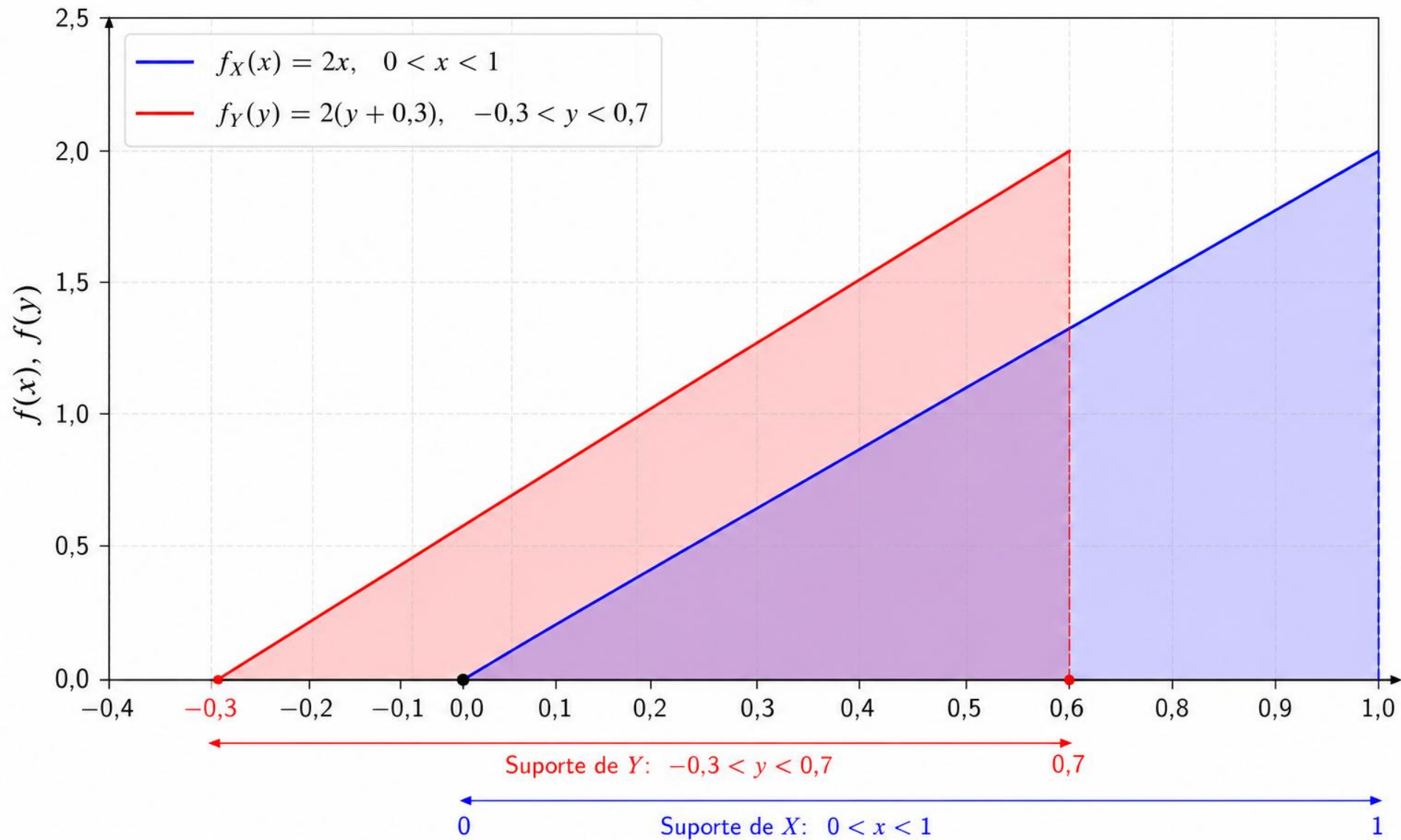
$$(0,5 + d)^2 = 0,64$$

$$0,25 + d + d^2 = 0,64$$

$$d = 0,3$$

- No **exemplo 2** foi feita uma modificação na variável aleatória X de forma a se obter a variável aleatória $Y = \text{Max}(0; X - d) = (X - d)_+$ em que d corresponde ao valor da franquia.
- A variável aleatória Y corresponde ao valor de excesso de dano acima da franquia para todas as severidades ocorridas X .
- Situação teórica em que os segurados informariam ao segurador **todos os sinistros ocorridos**, mesmo aqueles cujo valor ficou abaixo da franquia dedutível (esses considerados pela seguradora como de valor 0).
- O segurador trata os sinistros avisados com severidade abaixo da franquia como sendo sinistros de valor 0.

Funções densidade de X e de Y ($Y = X - d$) com $d = 0,3$



EXEMPLO 3 Entregar!!!

Considere a função de sobrevivência dada por:

$$\bar{F}_X(x) = 115^{-\frac{1}{3}}(115 - x)^{\frac{1}{3}}; \quad 0 \leq x \leq 115.$$

Calcule $f(x)$. **ENTREGAR**

Variáveis aleatórias multidimensionais

- Também conhecidas como vetores aleatórios, vetores de variáveis aleatórias ou variável aleatória multivariada... envolvem mais de uma variável aleatória, ou seja, múltiplas observações que estão relacionadas entre si....
- Em essência, uma variável aleatória multidimensional é uma coleção de variáveis aleatórias que são observadas simultaneamente.

Sempre que duas ou mais variáveis aleatórias são levadas em conta, três tipos de distribuição de probabilidade são definidos.

A distribuição conjunta, descreve o comportamento de todas elas simultaneamente.

A distribuição marginal, descreve o comportamento de uma delas isoladamente, desconsiderando as demais.

A distribuição condicional, descreve o comportamento de uma variável aleatória isoladamente dado que as outras assumem determinado valor.

Probabilidade condicional

Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias discretas definidas no mesmo espaço de probabilidade. Definimos a função de probabilidade condicional de X_1 dado X_2 , por:

$$P_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{P_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{P_{X_2}(x_2)}$$

onde $P_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ é a função de probabilidade conjunta de X_1 e X_2 .

Probabilidade condicional

Sejam X_1 e X_2 duas variáveis aleatórias contínuas definidas no mesmo espaço de probabilidade. Definimos a função de densidade condicional de X_1 dado X_2 , por:

$$f_{X_1|X_2}(x_1|x_2) = \frac{f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)}{f_{X_2}(x_2)}$$

Em que $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$ é a função densidade conjunta de X_1 e X_2 e $f_{X_2}(x_2)$ é função densidade marginal de X_2 .

EXEMPLO 4: Uma apólice de seguro cobre uma perda aleatória X , com um valor de franquia d , onde a seguradora somente é notificada pelo segurado quando a severidade do sinistro supera a franquia dedutível, ou seja, o valor das severidades conhecidas pela seguradora é definida por Y , tal que:

$$Y = (X - d) | (X > d)$$

Considerando que a perda é modelada como um variável aleatória contínua com densidade $f_X(x) = 2x$ para $0 < x < 1$ e que $d = 0,3$, obtenha $f_Y(y)$.

Solução

EXEMPLO 4-Solução

$$Y = (X - d)|X > d$$

Partimos do modelo de distribuição $F_Y(y)$. Assim:

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X - d \leq y|X > d)$$

$$P(X \leq y + d|X > d) = \frac{P(X \leq y + d, X > d)}{P(X > d)} = \frac{P(y + d > X > d)}{P(X > d)}$$

$$F_Y(y) = \frac{F_X(y + d) - F_X(d)}{\bar{F}_X(d)}$$

Consequentemente

$$f_Y(y) = \frac{dF_Y(y)}{dy} = \frac{1}{\bar{F}_X(d)} \left[\frac{dF_X(y + d)}{dy} - \frac{dF_X(d)}{dy} \right] = \frac{f_X(y + d)}{\bar{F}_X(d)}$$

EXEMPLO 4-Solução

$$f_Y(y) = \frac{f_X(y + d)}{\bar{F}_X(d)} = \frac{2(y + d)}{\int_d^1 2x dx} = \frac{2(y + d)}{1 - d^2}$$

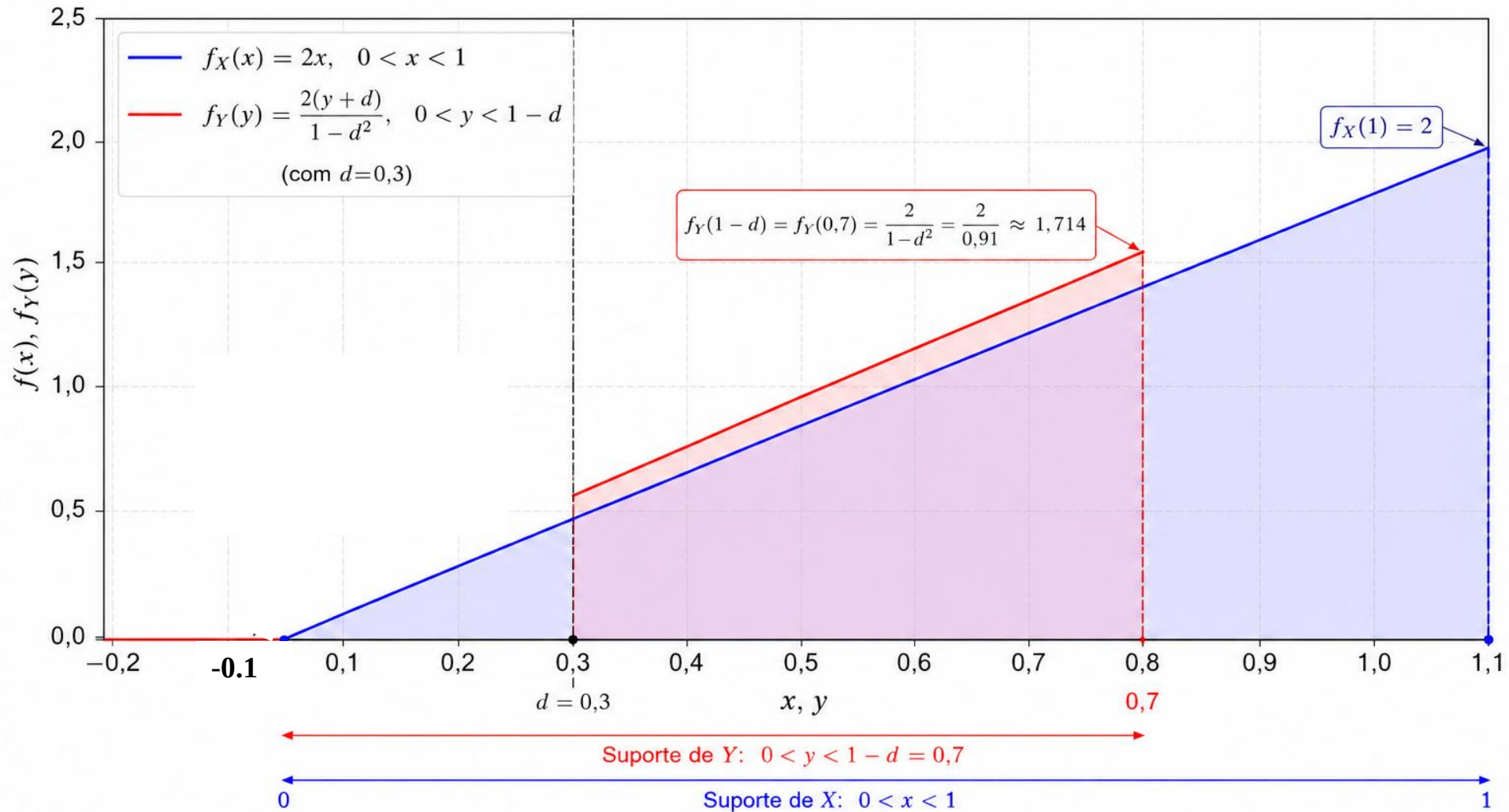
Logo

$$f_Y(y) = \frac{2y + 0,6}{0,91}, 0 < y < 0,7$$

- No **exemplo 4** foi feita uma modificação na variável aleatória X de forma a se obter a variável aleatória $Y = (X - d) | (X > d)$ em que d corresponde ao valor da franquia.
- A variável aleatória Y corresponde ao valor de excesso de danos ocorridos somente para os sinistros acima da franquia.
- A seguradora somente é notificada pelo segurado sobre os sinistros que superam a franquia (d),
- Y é uma variável **aleatória truncada**, pois é obtida mediante a operação de restringir o domínio da variável aleatória original e redimensionar adequadamente a probabilidade sobre o novo domínio.
 - Uma distribuição truncada pode ser considerada como uma distribuição **condicionada a uma restrição** intervalar no suporte da distribuição.

Funções densidade de X e de Y

com $d = 0,3$



$Y = (X - d) \mid (X > d) \Rightarrow Y > 0$
(a seguradora só observa perdas que excedem a franquia d)

- Os **exemplos 2 e 4** são exemplos de modificações na variável aleatória da severidade de sinistros no sentido de introduzir o conceito de franquias dedutíveis,
- custo médio por exposição ao risco

$$Y = \text{Max}(0; X - d) = (X - d)_+$$

- custo médio sabendo que ocorreu um sinistro indenizável.

$$Y = (X - d) | (X > d)$$

Independência de variáveis aleatórias

A independência é um requisito importante que permite resolver, com rigor matemático e sem aproximações, muitos problemas de interesse prático.

Definição: Duas variáveis aleatórias, X e Y definidas no mesmo espaço de probabilidade, são independentes se a informação sobre uma delas não altera a probabilidade de ocorrência da outra.

Independência de variáveis aleatórias

Para variáveis aleatórias discretas:

$$X, Y \text{ independentes} \Leftrightarrow P_{X,Y}(x, y) \equiv P_X(x)P_Y(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Para variáveis aleatórias contínuas:

$$X, Y \text{ independentes} \Leftrightarrow f_{X,Y}(x, y) \equiv f_X(x)f_Y(y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

EXEMPLO 5: Suponha que X e Y tenham distribuição conjunta dada por a e b . Determine as distribuições marginais e diga se X e Y são independentes.

a) $f_{X,Y}(x,y) = 0,0008e^{(-0,02x-0,04y)}I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)$

b)

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/8	0	0
1	0	3/8	0
2	0	0	3/8
3	1/8	0	0

EXEMPLO 5: Suponha que X e Y tenham distribuição conjunta dada por a e b . Determine as distribuições marginais e diga se X e Y são independentes.

a) $f_{X,Y}(x,y) = 0,0008e^{(-0,02x-0,04y)}I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)$

$$\int_0^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = f_Y(y) = 0,04e^{-0,04y}$$

$$\int_0^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = f_X(x) = 0,02e^{-0,02x}$$

b)

$X \backslash Y$	0	1	2	$P(X = x)$
0	1/8	0	0	1/8
1	0	3/8	0	3/8
2	0	0	3/8	3/8
3	1/8	0	0	1/8
$P(Y = y)$	2/8	3/8	3/8	

Suponha que X e Y tenham distribuição conjunta dada por a e b . Determine as distribuições marginais e diga se X e Y são independentes.

$$a) \quad f_{X,Y}(x,y) = 0,0008e^{(-0,02x-0,04y)}I_{(0,\infty)}(x)I_{(0,\infty)}(y)$$

$$\int_0^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dx = f_Y(y) = 0,04e^{-0,04y}$$

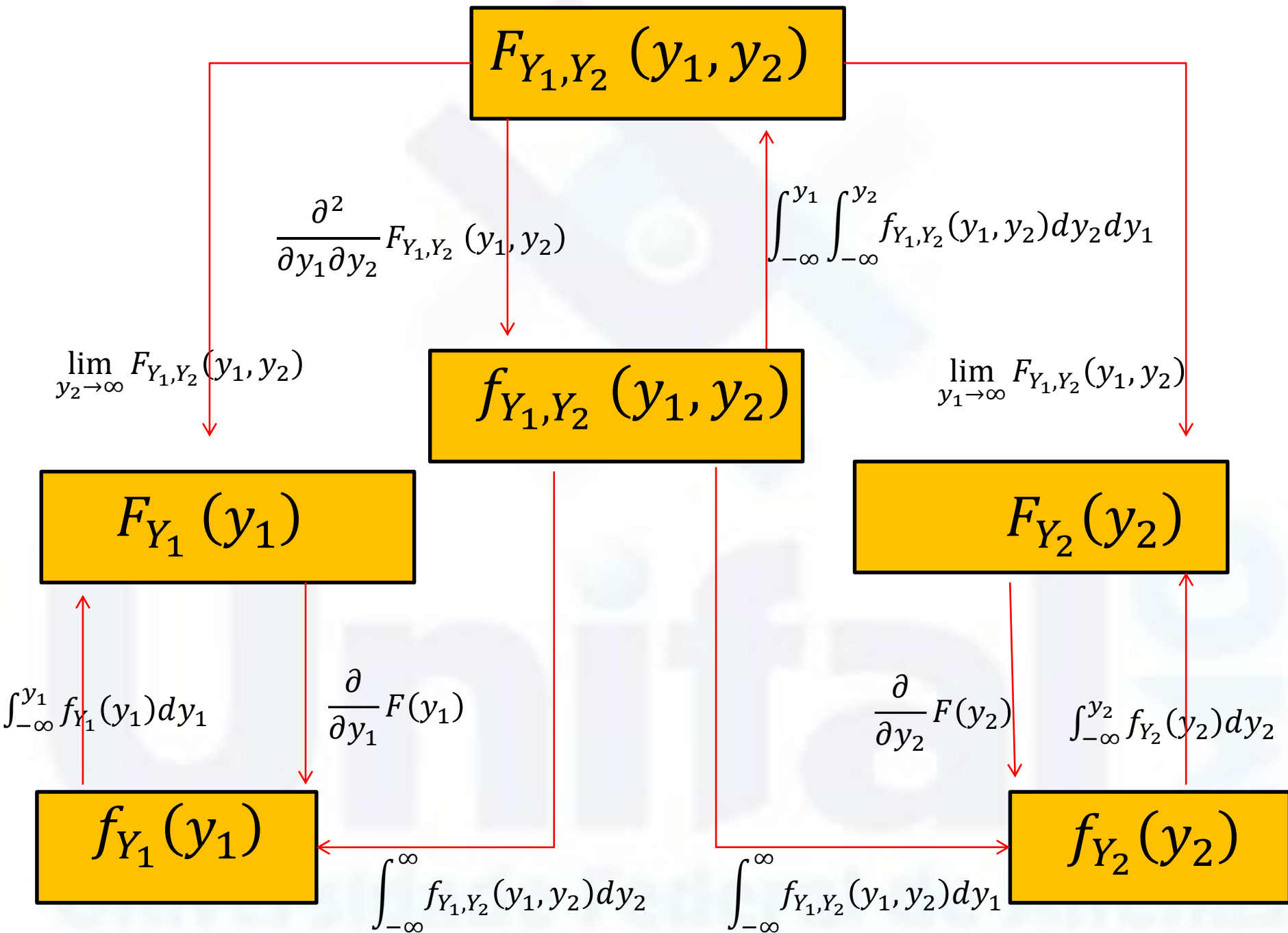
$$\int_0^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy = f_X(x) = 0,02e^{-0,02x}$$

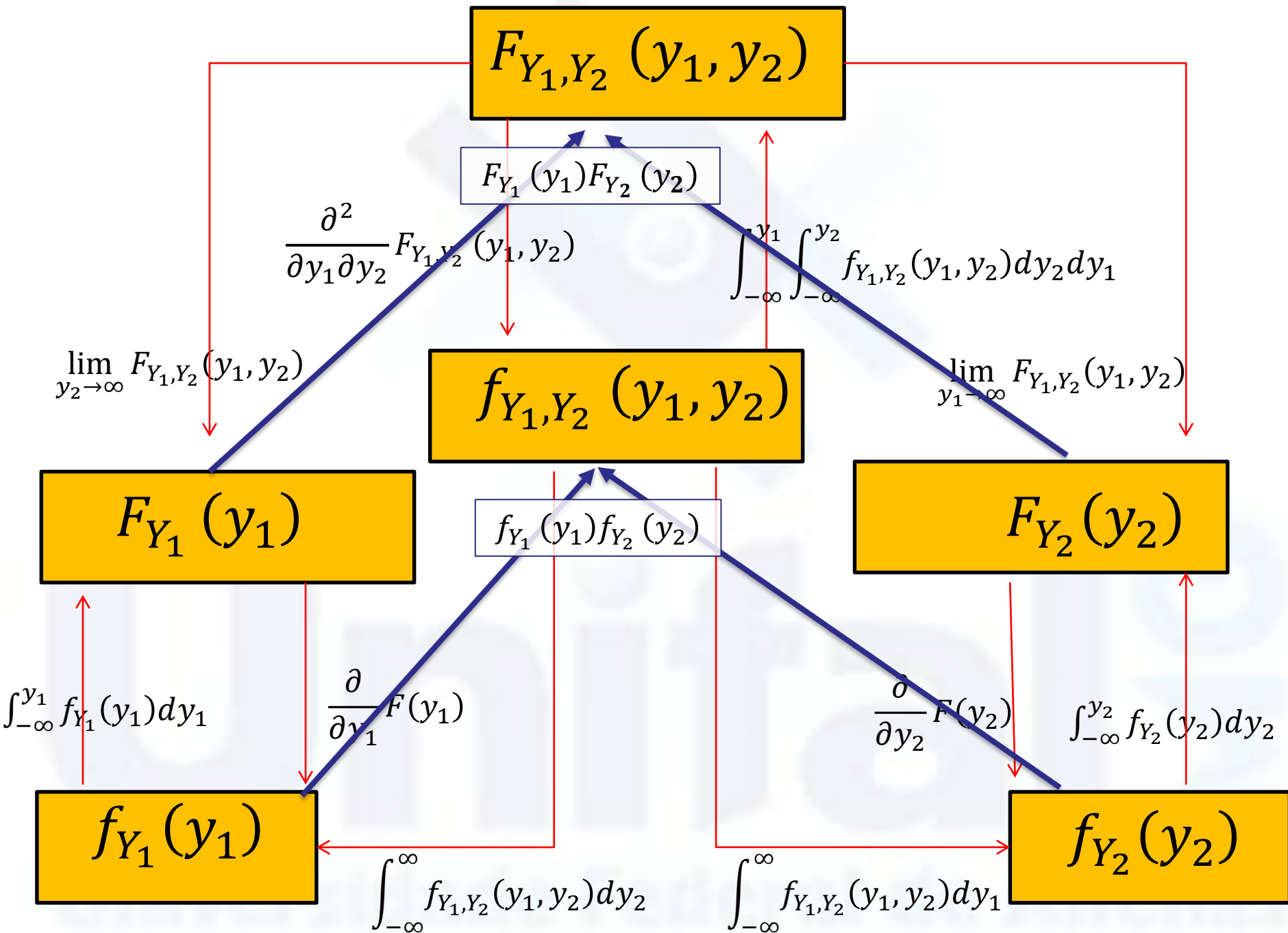
$$f_{X,Y}(x,y) = f_Y(y)f_X(x)$$

b)

$X \backslash Y$	0	1	2	$P(X = x)$
0	1/8	0	0	1/8
1	0	3/8	0	3/8
2	0	0	3/8	3/8
3	1/8	0	0	1/8
$P(Y = y)$	2/8	3/8	3/8	

$$P_{X,Y}(2,2) \neq P_X(2)P_Y(2)$$





$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$$

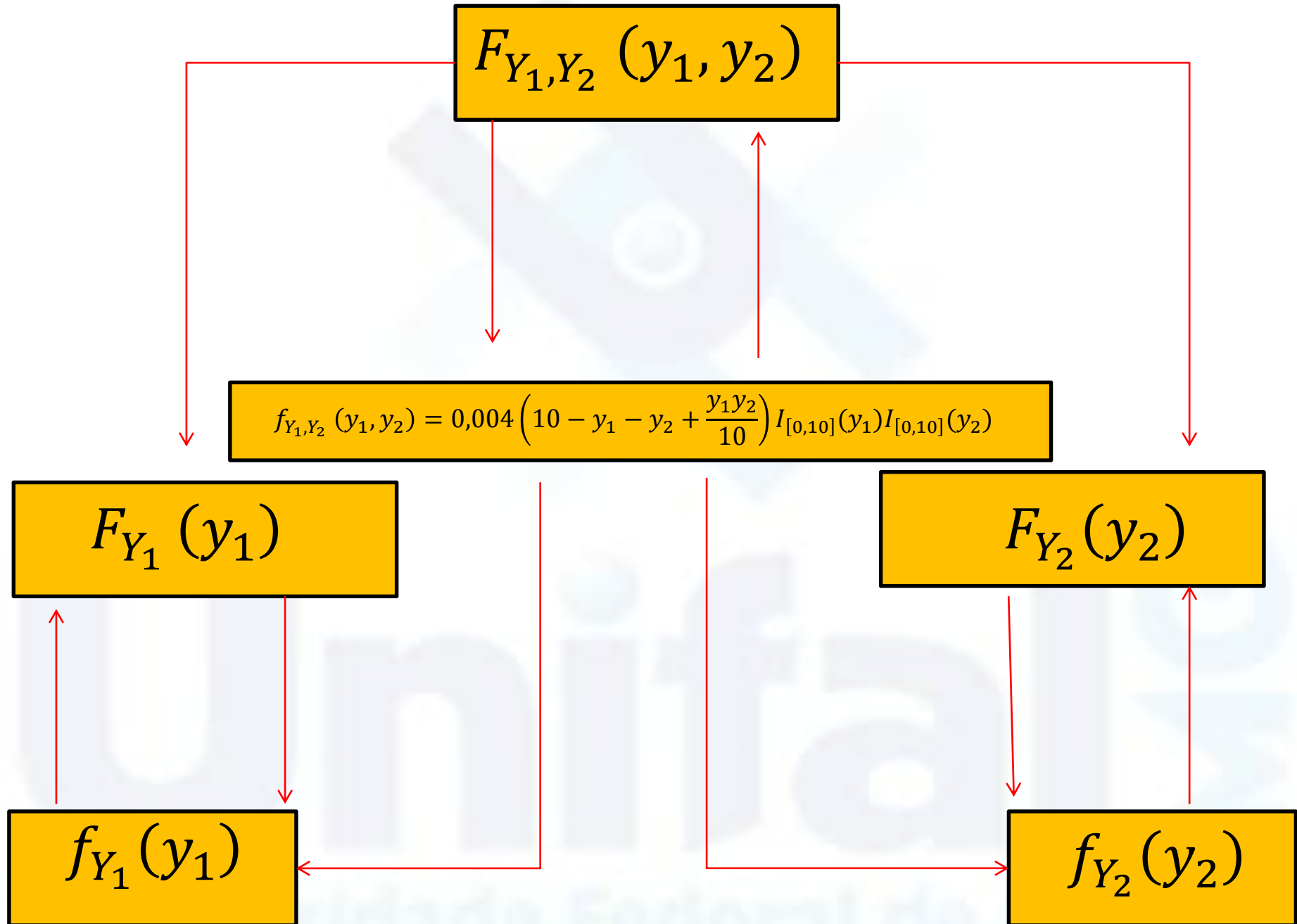
$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = 0,004 \left(10 - y_1 - y_2 + \frac{y_1 y_2}{10} \right) I_{[0,10]}(y_1) I_{[0,10]}(y_2)$$

$$F_{Y_1}(y_1)$$

$$F_{Y_2}(y_2)$$

$$f_{Y_1}(y_1)$$

$$f_{Y_2}(y_2)$$



$$f_{Y_1}(y_1) = \int_0^{10} 0,004 \left(10 - y_1 - y_2 + \frac{y_1 y_2}{10} \right) dy_2$$

$$f_{Y_1}(y_1) = 0,004 \left(10y_2 - y_1 y_2 - \frac{y_2^2}{2} + \frac{y_1 y_2^2}{20} \right) \Big|_0^{10}$$

$$f_{Y_1}(y_1) = 0,004(50 - 5y_1)$$

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_0^{10} 0,004 \left(10 - y_1 - y_2 + \frac{y_1 y_2}{10} \right) dy_1$$

$$f_{Y_2}(y_2) = 0,004 \left(10y_1 - \frac{y_1^2}{2} - y_1 y_2 + \frac{y_2 y_1^2}{20} \right) \Big|_0^{10}$$

$$f_{Y_2}(y_2) = 0,004(50 - 5y_1)$$

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$$

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = 0,004 \left(10 - y_1 - y_2 + \frac{y_1 y_2}{10} \right) I_{[0,10]}(y_1) I_{[0,10]}(y_2)$$

$$F_{Y_1}(y_1)$$

$$F_{Y_2}(y_2)$$

$$f_{Y_1}(y_1) = 0,004(50 - 5y_1)I_{[0,10]}(y_1)$$

$$f_{Y_2}(y_2) = 0,004(50 - 5y_2)I_{[0,10]}(y_2)$$

$$F_{Y_1}(y_1) = \int_0^{y_1} f_{Y_1}(u) du = \int_0^{y_1} 0,004(50 - 5u) du$$

$$F_{Y_1}(y_1) = 0,004 \left(50u - \frac{5u^2}{2} \right) \Big|_0^{y_1} = 0,2 \left(y_1 - \frac{y_1^2}{20} \right)$$

$$F_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} 0 & y_1 \leq 0 \\ 0,2 \left(y_1 - \frac{y_1^2}{20} \right) & 0 < y_1 \leq 10 \\ 1 & y_1 > 10 \end{cases}$$

$$F_{Y_2}(y_2) = \int_0^{y_2} f_{Y_2}(u) du = \int_0^{y_2} 0,004(50 - 5u) du$$

$$F_{Y_2}(y_2) = \begin{cases} 0 & y_2 \leq 0 \\ 0,2 \left(y_2 - \frac{y_2^2}{20} \right) & 0 < y_2 \leq 10 \\ 1 & y_2 > 10 \end{cases}$$

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2)$$

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = 0,004 \left(10 - y_1 - y_2 + \frac{y_1 y_2}{10} \right) I_{[0,10]}(y_1) I_{[0,10]}(y_2)$$

$$F_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} 0 & y_1 \leq 0 \\ 0,2 \left(y_1 - \frac{y_1^2}{20} \right) & 0 < y_1 \leq 10 \\ 1 & y_1 > 10 \end{cases}$$

$$F_{Y_2}(y_2) = \begin{cases} 0 & y_2 \leq 0 \\ 0,2 \left(y_2 - \frac{y_2^2}{20} \right) & 0 < y_2 \leq 10 \\ 1 & y_2 > 10 \end{cases}$$

$$f_{Y_1}(y_1) = 0,004(50 - 5y_1)I_{[0,10]}(y_1)$$

$$f_{Y_2}(y_2) = 0,004(50 - 5y_1)I_{[0,10]}(y_2)$$

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \int_0^{y_2} \int_0^{y_1} 0,004 \left(10 - u - v + \frac{uv}{10} \right) du dv$$

$$\int_0^{y_1} 0,004 \left(10 - u - v + \frac{uv}{10} \right) du = 0,004 \left(10u - \frac{u^2}{2} - uv + \frac{u^2 v}{20} \right) \Big|_{u=0}^{u=y_1} = 0,004 \left(10y_1 - \frac{y_1^2}{2} - y_1 v + \frac{y_1^2 v}{20} \right)$$

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \int_0^{y_2} 0,004 \left(10y_1 - \frac{y_1^2}{2} - y_1 v + \frac{y_1^2 v}{20} \right) dv$$

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = 0,004 \left(10y_1 v - \frac{y_1^2}{2} v - \frac{y_1 v^2}{2} + \frac{y_1^2 v^2}{40} \right) \Big|_{v=0}^{v=y_2}$$

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = 0,004 \left(10y_1 y_2 - \frac{y_1^2 y_2}{2} - \frac{y_1 y_2^2}{2} + \frac{y_1^2 y_2^2}{40} \right)$$

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} 0 & y_1 \leq 0, y_2 \leq 0 \\ 0,004 \left(10y_1y_2 - \frac{y_1^2y_2}{2} - \frac{y_1y_2^2}{2} + \frac{y_1^2y_2^2}{40} \right) & 0 < y_1 \leq 10, 0 < y_2 \leq 10 \\ 0,2 \left(y_1 - \frac{y_1^2}{20} \right) & 0 < y_1 \leq 10, y_2 > 10 \\ 0,2 \left(y_2 - \frac{y_2^2}{20} \right) & 0 < y_2 \leq 10, y_1 > 10 \\ 1 & y_1 > 10, y_2 > 10 \end{cases}$$

$$F_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \begin{cases} 0 & y_1 \leq 0, y_2 \leq 0 \\ 0,004 \left(10y_1y_2 - \frac{y_1^2y_2}{2} - \frac{y_1y_2^2}{2} + \frac{y_1^2y_2^2}{40} \right) & 0 < y_1 \leq 10, 0 < y_2 \leq 10 \\ 0,2 \left(y_1 - \frac{y_1^2}{20} \right) & 0 < y_1 \leq 10, y_2 > 10 \\ 0,2 \left(y_2 - \frac{y_2^2}{20} \right) & 0 < y_2 \leq 10, y_1 > 10 \\ 1 & y_1 > 10, y_2 > 10 \end{cases}$$

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = 0,004 \left(10 - y_1 - y_2 + \frac{y_1y_2}{10} \right) I_{[0,10]}(y_1) I_{[0,10]}(y_2)$$

$$F_{Y_1}(y_1) = \begin{cases} 0 & y_1 \leq 0 \\ 0,2 \left(y_1 - \frac{y_1^2}{20} \right) & 0 < y_1 \leq 10 \\ 1 & y_1 > 10 \end{cases}$$

$$F_{Y_2}(y_2) = \begin{cases} 0 & y_2 \leq 0 \\ 0,2 \left(y_2 - \frac{y_2^2}{20} \right) & 0 < y_2 \leq 10 \\ 1 & y_2 > 10 \end{cases}$$

$$f_{Y_1}(y_1) = 0,004(50 - 5y_1)I_{[0,10]}(y_1)$$

$$f_{Y_2}(y_2) = 0,004(50 - 5y_1)I_{[0,10]}(y_2)$$

Referências

Magalhães, M. N. Lima, A. C. P. **Noções de Probabilidade e Estatística**, Editora USP: São Paulo, 2001.

JAMES, B. R.; Probabilidade: **Um Curso em nível intermediário**, IMPA, Rio de Janeiro, 3 ed., 2004.

PIRES, M. D.; COSTA, L. H.; FERREIRA, L.; MARQUES, R. **Teoria do risco atuarial: Fundamentos e conceitos**. Curitiba, CRV 2020.

